

HYDRODYNAMIQUE

C. BARUTEAU

Service d'Astrophysique, CEA Saclay & Université Paris VI, email: clement.baruteau@cea.fr

RÉSUMÉ

Il s'agit du dernier cours de LP101. Nous montrons que le mouvement d'un fluide peut, sous certaines hypothèses, être décrit par des lois simples de conservation: conservation du débit et conservation de l'énergie mécanique (théorème de Bernoulli).

1 Description d'un fluide en mouvement

1.1 Echelle mésoscopique : particule fluide

Un solide est indéformable : quand un solide bouge, tous les points du solide bougent de concert. Un seul point est suffisant pour décrire l'évolution du solide : son centre de masse. Un fluide est, au contraire, déformable (exemple du gaz qui occupe tout le volume qui lui est disponible). Une description macroscopique est donc inadaptée. Une description microscopique n'est pas envisageable non plus : $1\mu\text{m}^3$ de gaz contient $\sim 3 \times 10^7$ molécules, on ne va pas appliquer le principe fondamental de la dynamique à chaque atome ou molécule du gaz !

On définit l'échelle **mésoscopique** δ comme échelle intermédiaire entre celles microscopique ($\sim 10^{-10}$ m) et macroscopique (~ 1 m), de sorte qu'un volume δ^3 de fluide contienne suffisamment de molécules pour définir des valeurs moyennes des champs (de vitesse, de pression...), avec des fluctuations statistiques négligeables¹.

Définition : On appelle **particule fluide** (pf) un élément de masse $\rho\delta^3$ du fluide, ρ désignant la masse volumique du fluide. La particule fluide est un système **fermé**, elle conserve sa masse au cours de son mouvement.

Il existe deux approches différentes pour décrire un fluide en mouvement.

1.2 Approche Lagrangienne

On doit cette première approche à Louis-Joseph de Lagrange (1736-1813), mathématicien piémontais. Cette approche consiste à *suivre l'évolution de chaque pf au cours de son mouvement*. On imagine partitionner le fluide en plein de bouées. Chacun suit sa bouée depuis le bord de la rive, relève ses position et vitesse au cours du temps.

Cette approche est intuitive car elle relève de la mécanique classique du point (où l'on applique le principe fondamental de la dynamique sur un système fermé). Elle conduit naturellement à définir la trajectoire d'un pf comme le lieu des positions successives de cette pf au

cours du temps. Cependant, cette approche est malcommode pour l'exploitation des **conditions aux limites**. Il s'agit de points fixés de l'espace où la pression ou la vitesse... prennent des valeurs bien précises (ex : obstacles, interfaces liquide/air...).

1.3 Approche Eulerienne

On doit cette seconde approche à Leonhard Euler, mathématicien suisse (1707-1783). Cette fois-ci, on *isole un point M donné de l'espace* et on relève pression, vitesse... du fluide en ce point au cours du temps. On imagine un observateur sur un pont au-dessus du fluide en train de scruter un point M du fluide. Il voit des pfs (bouées) différentes passer par M au cours du temps. L'observateur est lié au référentiel.

Ce point de vue est certes moins intuitif, mais bien plus commode du point de vue des conditions aux limites. Il conduit dorénavant à définir des **lignes de courant** (ldc). Il s'agit des courbes tangentes en chaque point M au vecteur vitesse en ce point (ex : tracé de ldc autour d'un obstacle sphérique). On définit aussi un tube de courant comme l'ensemble des ldc s'appuyant sur un contour (surface) autour d'un point du fluide.

1.4 Écoulement stationnaire

Définition : Un écoulement est dit **stationnaire** (ou permanent) si chaque champ eulerien (vitesse, pression, ...) est indépendant du temps.

Un observateur fixe en un point M de l'espace voit ainsi une situation inchangée au cours du temps : toutes les pf passant en M au cours du temps ont la même vitesse, même pression... au cours du temps. Il s'agit d'un concept intrinsèquement eulerien et non pas lagrangien. On peut s'en convaincre par l'exemple suivant. Considérons un écoulement unidimensionnel décrit par le champ de vitesse $\vec{v} = \alpha x \vec{i}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Il s'agit d'un écoulement stationnaire car *en une position donnée* (un x donné), \vec{v} ne varie pas au cours du temps. Pourtant, $\vec{v}(x = 2a) = 2\vec{v}(x = a)$: une pf est accélérée entre les positions $x = a$ et $x = 2a$.

Notons que le caractère stationnaire d'un écoulement dépend du choix du référentiel. On peut s'en convaincre avec l'exemple du sillage d'un bateau : le sillage est stationnaire

¹Pour que cette approche soit valable, il faut que δ soit très supérieure au libre-parcours moyen d'une molécule du fluide (distance parcourue entre deux collisions successives, cf. boules de billard). En pratique, $\delta \sim 1\mu\text{m}$ convient.

du point de vue du bateau, mais pas du bord du rivage. Enfin, une propriété importante d'un écoulement stationnaire est que trajectoires et lignes de courant **coïncident**.

2 Écoulement stationnaire et incompressible : théorèmes de conservation du débit

2.1 Modèle de l'écoulement incompressible

Définition : Un écoulement est dit **incompressible** si le volume V de ses pf ne varie pas au cours de leur mouvement. Comme la masse m des pf ne varie pas (système fermé), un écoulement incompressible est telle que la masse volumique $\rho = m/V$ de ses pfs ne varie pas au cours du temps.

Il convient de noter qu'il s'agit d'un modèle, car en réalité les fluides sont compressibles. L'intérêt d'un tel modèle est de simplifier les calculs et, en particulier, d'induire des lois simples de conservation (cf. sections 2.2 et 3.2). L'écoulement incompressible est un modèle qui s'applique bien aux liquides, beaucoup moins bien aux gaz.

2.2 Conservation du débit

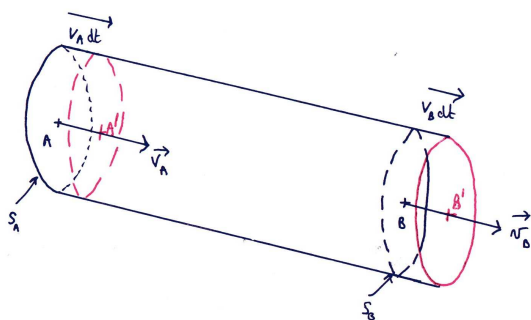


FIG. 1 – Tube de courant élémentaire compris entre les surfaces S_A et S_B . Entre les instants t et $t + dt$, une masse dm_A de fluide rentre dans le tube de courant par S_A , et une masse dm_B ressort du tube par S_B .

Nous supposons uniquement que l'écoulement est stationnaire. On considère un tube de courant élémentaire entre deux section S_A et S_B du fluide (voir figure 1). Les vitesses et masse volumiques sont supposées homogènes sur ces surfaces. On suppose les vitesses normales au vecteur surface. Effectuons un bilan de masse entre deux instants t et $t + dt$. Entre ces instants, une masse dm_A de fluide entre dans le tube de courant par S_A , et une masse dm_B ressort du tube par S_B . La masse dm_A est la masse de fluide contenue dans le cylindre de section S_A et de génératrice (ou hauteur) $v_A dt$. Le volume de ce cylindre étant $S_A v_A dt$, on en déduit que $dm_A = \rho_A S_A v_A dt$. De même, nous avons $dm_B = \rho_B S_B v_B dt$. Le **postulat de conservation de la masse** impose que $dm_A = dm_B$, si bien que :

$$\boxed{\rho_A S_A v_A = \rho_B S_B v_B.} \quad (1)$$

La quantité $\rho_A S_A v_A$ est homogène à une masse par unité de temps, c'est ce qu'on appelle le débit massique du fluide à travers la section S_A .

Définition : On appelle **débit massique** D_m d'un écoulement la masse de fluide qui traverse une section S par unité de temps² : $D_m = \rho S v$. La dimension de D_m est $M.T^{-1}$, et s'exprime en $kg.s^{-1}$.

D'après l'équation (1), nous voyons que le **débit massique** d'un écoulement **stationnaire** se conserve au cours de son évolution.

Supposons de plus l'écoulement précédent incompressible. La masse volumique des pf se conserve le long de leur trajectoire. L'écoulement étant stationnaire (trajectoires des pf et lignes de courant sont confondues), la masse volumique est conservée le long d'une ligne de courant : $\rho_A = \rho_B$. L'équation (1) devient alors :

$$\boxed{S_A v_A = S_B v_B.} \quad (2)$$

La quantité $S_A v_A$ est homogène à un volume de fluide par unité de temps, c'est ce qu'on appelle le débit volumique du fluide à travers la section S_A .

Définition : On appelle **débit volumique** D_v d'un écoulement le volume de fluide qui traverse une section S par unité de temps : $D_v = S v = D_m/\rho$. La dimension de D_v est $L^3.T^{-1}$, et s'exprime en $m^3.s^{-1}$.

D'après l'équation (2), nous voyons que le **débit volumique** d'un écoulement **stationnaire et incompressible** se conserve au cours de son évolution.

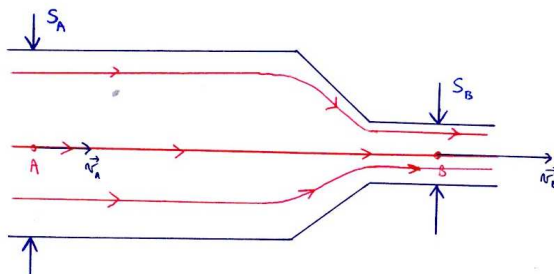


FIG. 2 – Tube de Venturi. Les lignes de courant sont plus resserrées en B qu'en A : la vitesse de l'écoulement est plus élevée en B qu'en A !

Application : on considère un écoulement stationnaire et incompressible à l'intérieur d'un tube de Venturi (voir figure 2). Nous appliquons la conservation du débit volumique entre³ les deux surfaces S_A et S_B : $S_A v_A = S_B v_B$. Le tube subit un étranglement en B : les lignes de courant sont donc plus resserrées en B qu'en A. On en déduit que $v_B > v_A$. L'écoulement est plus rapide à l'étranglement ! Un corollaire pratique de cette application est : *plus c'est étroit, plus ça va vite !*

²Cette formule est en quelque sorte un cas particulier car elle suppose que la vitesse de l'écoulement est orthogonale à la surface traversée. Elle suppose aussi que toutes les pfs qui traversent la section ont la même masse volumique et le même vecteur vitesse. Une formule plus générale est $D_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$.

³Cela suppose que la masse volumique est uniforme sur chacune des surfaces...

3 Écoulement stationnaire, incompressible et parfait : théorème de Bernoulli

3.1 Modèle de l'écoulement parfait

Un fluide est une assemblée de particules fluides. Celles-ci sont soumises à des **forces extérieures en volume**, comme l'action du champ de pesanteur (la force volumique résultante s'écrit $\vec{f}_V = \rho\vec{g}$). Elles sont aussi soumises à des **forces de contact**. Une modélisation simple est de supposer ces forces orthogonales aux surfaces des pf : c'est l'action de la **pression** (la force volumique résultante s'écrit $\vec{f}_V = -\text{grad}(P)$). En réalité, ces forces de contact ont aussi une composante tangentielle (imaginer le glissement avec frottement de deux pfs l'une par rapport à l'autre). Cette composante tangentielle est associée à la **viscosité** du fluide, elle provoque une dissipation d'énergie mécanique.

Définition : Un écoulement parfait (ou idéal) est un écoulement où les forces de contact entre pfs sont orthogonales à leurs surfaces.

Cela revient, de façon simple, à négliger la viscosité⁴ du fluide. Dans ce cas, la résultante des forces volumiques s'exerçant sur une pf de fluide parfait est⁵ $\rho\vec{a} = -\text{grad}(P) + \rho\vec{g}$.

3.2 Théorème de Bernoulli

Considérons un écoulement stationnaire, incompressible et parfait. Comme au § 2.2, on isole un tube de courant élémentaire entre deux sections S_A et S_B (voir figure 1), sur lequel on applique le théorème de l'énergie mécanique entre deux instants t et $t + dt$: $dE_m = \delta W$ (forces non-conservatives).

- (a) calcul de $dE_m = E_m(t + dt) - E_m(t)$: à l'instant t , le fluide se situe entre A et B. A l'instant $t + dt$, il se situe entre A' et B'. Formellement, nous avons donc :

$$dE_m = E_m(A'B', t + dt) + E_m(BB', t + dt) - E_m(AA', t) - E_m(A'B, t).$$

L'écoulement étant stationnaire, $E_m(A'B, t + dt) = E_m(A'B, t)$. La variation d'énergie mécanique du système est induite par l'arrivée de fluide via S_A et par le départ de fluide via S_B :

$$\begin{aligned} dE_m &= E_m(dm_B) - E_m(dm_A) \\ &= \frac{1}{2}dm_B v_B^2 + dm_B g z_B - \frac{1}{2}dm_A v_A^2 - dm_A g z_A \\ &= \left(\frac{1}{2}v_B^2 + g z_B - \frac{1}{2}v_A^2 - g z_A \right) dm \end{aligned} \quad (3)$$

- (b) calcul de δW (forces non-conservatives) : les seules forces non-conservatives s'appliquant sur le tube de courant sont les forces de pression. Les forces de pression s'exerçant sur les parois latérales du tube ne

travaillent pas car sont orthogonales au déplacement élémentaire $\vec{v}dt$ du fluide. Notons \vec{n} le vecteur directeur unitaire de la direction d'écoulement ($\vec{n} = \vec{v}_A / \|\vec{v}_A\|$). Seules travaillent les forces de pression sur S_A (force $p_A S_A \vec{n}$) et S_B (force $-p_B S_B \vec{n}$) :

$$\begin{aligned} \delta W &= p_A S_A \vec{n} \cdot \vec{v}_A dt + p_B S_B (-\vec{n}) \cdot \vec{v}_B dt \\ &= (p_A S_A v_A - p_B S_B v_B) dt \\ &= \left(\frac{p_A}{\rho_A} - \frac{p_B}{\rho_B} \right) dm, \end{aligned} \quad (4)$$

où $dm = \rho_A S_A v_A dt = \rho_B S_B v_B dt$ d'après le postulat de conservation de la masse (cf. § 2.2).

- (c) théorème de Bernoulli : l'identification des équations (3) et (4) aboutit à :

$$p_A + \frac{1}{2}\rho_A v_A^2 + \rho_A g z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho_B v_B^2 + \rho_B g z_B \quad (5)$$

équation que l'on peut généraliser en : *la quantité $p + \rho v^2/2 + \rho g z$ se conserve le long d'une ligne de courant*. Ceci constitue le **théorème de Bernoulli**⁶. Il exprime la conservation de l'énergie mécanique (ici, par unité de volume) de l'écoulement le long d'une ligne de courant. Ce théorème conduit aux remarques suivantes :

- p , $\rho v^2/2$ et $\rho g z$ ont la même dimension, celle d'une énergie par unité de volume : $M.L^{-1}.T^{-2}$. Dit autrement, une pression (force par unité de surface) est homogène à une énergie volumique.
- ce théorème ne s'applique que si chacune des hypothèses au début du paragraphe est vérifiée. Par exemple, le théorème de Bernoulli ne peut *a priori* pas s'appliquer à un fluide visqueux (écoulement non-parfait). Avec ces hypothèses, ce théorème ne peut s'appliquer *que sur une ligne de courant*.
- dans le cas d'un écoulement statique ($v_A = 0 = v_B$), l'équation 5 devient $p_A + \rho_A g z_A = p_B + \rho_B g z_B$, qui correspond au principe fondamental de la statique des fluides. Le théorème de Bernoulli peut donc être vu comme une généralisation de ce principe au cas d'un fluide en mouvement.

3.3 Applications

3.3.1 Vidange d'un réservoir : loi de Torricelli

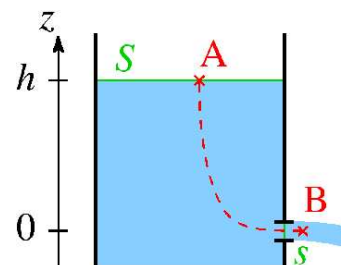


FIG. 3 – Écoulement d'un réservoir : loi de Torricelli.

L'écoulement dont on fait la vidange (voir figure 3) est supposé stationnaire, incompressible (valide pour l'eau) et

⁴Vous verrez plus tard que cette restriction n'est pas suffisante. Il faut pouvoir négliger tout processus de diffusion dans le fluide, source d'irréversibilité (diffusion thermique, de particule, ...).

⁵Il s'agit en quelque sorte d'une généralisation de la seconde loi de Newton aux fluides. En revanche, le terme \vec{a} est plus compliqué qu'une simple dérivée de \vec{v} par rapport à t ...

⁶Bernoulli était un médecin, physicien et mathématicien suisse (1700-1782), ami d'Euler.

parfait (pas de viscosité). L'objectif est de déterminer la vitesse de l'écoulement en B. Isolons une ligne de courant entre les points A et B. Le théorème de Bernoulli appliqué le long de cette ligne de courant donne l'équation (5). Les points A et B se trouvant sur une surface libre, $p_A = p_0 = p_B$, où p_0 désigne la pression atmosphérique. L'équation (5) devient :

$$\frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) = gh. \quad (6)$$

De plus, d'après le théorème de conservation du débit volumique, $sv_A = sv_B$. Comme $s \ll S$, nous avons $v_A \ll v_B$. Finalement, la vitesse de l'écoulement en B est donnée par $v_B \approx \sqrt{2gh}$, ce qui correspond à la vitesse de chute libre d'une hauteur h . Il s'agit de la loi de **Torricelli**⁷.

A.N. si $h = 1.5$ m, nous trouvons $v_B \sim 5.5 \text{ m.s}^{-1}$. Si le trou en B a un rayon $r_B = 2$ cm, on obtient un débit volumique $D_v \sim 6.5 \text{ L.s}^{-1}$.

3.3.2 Mesure de la vitesse d'un écoulement : tube de Pitot

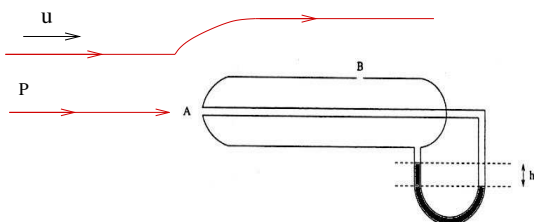


FIG. 4 – Schéma d'un tube de Pitot.

Un tube de Pitot⁸ permet de mesurer la vitesse d'un écoulement. Monté sur un avion, il mesure la vitesse de l'air "loin de l'avion" par rapport à l'avion, c'est-à-dire la vitesse de l'avion par rapport au référentiel terrestre, où l'air est globalement au repos. Cette problématique est schématisée sur la figure 4. Par deux prises de pression aux points A et B, ces points étant reliés par un manomètre différentiel à mercure, on peut déterminer la vitesse u de l'écoulement par rapport au tube. L'écoulement est supposé stationnaire, incompressible⁹ et idéal. On note P la pression de l'écoulement à hauteur du tube, mais loin du tube (cf. figure).

Considérons d'abord la ligne de courant horizontale passant par A. Négligeant la variation d'altitude le long de cette ldc, le théorème de Bernoulli s'écrit : $P + \rho u^2/2 = p_A + \rho v_A^2/2$. Par ailleurs, l'air ne rentre pas à l'intérieur du tube en A. Le point A est un obstacle à l'écoulement, ou **point d'arrêt** : $v_A = 0$. D'où :

$$\frac{1}{2}\rho u^2 = p_A - P \quad (7)$$

De plus, le point B est situé loin de la déflexion des lignes de courant par l'avion. On peut considérer qu'en B l'écoulement a la même pression et la même vitesse qu'un point situé très loin du tube : $v_b = u$ et $P = p_B$. Finalement,

l'équation (7) devient :

$$u = \left[\frac{2}{\rho} \underbrace{(p_A - p_B)}_{\rho_{\text{Hg}} gh} \right]^{1/2} = \left[\frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho} 2gh \right]^{1/2} \quad (8)$$

A.N. $h = 5$ cm, $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. On trouve¹⁰ $u \sim 360 \text{ km.h}^{-1}$.

3.3.3 Effet Venturi

Considérons le tube de Venturi représenté à la figure 2, que l'on suppose parcouru par un écoulement stationnaire, incompressible et parfait. Appliquons le théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant horizontale passant par A et B. Nous obtenons la relation de l'équation (5). De plus, la conservation du débit volumique Q nous donne $v_A = Q/S_A$ et $v_B = Q/S_B$ (voir § 2.2). Négligeant la variation d'altitude entre A et B, l'équation (5) donne :

$$p_B - p_A = \frac{1}{2}\rho Q^2 \left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_B^2} \right) < 0. \quad (9)$$

La pression du fluide est donc plus faible à l'étranglement. Ce résultat constitue l'**effet Venturi**¹¹, effet de dépression lors du resserrement des lignes de courant. Un corollaire pratique de cet effet est : *plus la section diminue, plus la vitesse augmente, et plus la pression diminue*. Le premier lien est assuré par la conservation du débit volumique, le second par le théorème de Bernoulli.

A.N. $p_A = p_0 \approx 10^5$ Pa, $\rho = \rho_{\text{eau}} = 1 \text{ kg.m}^{-3}$, $S_A = 1 \text{ m}^2$, $S_B = 10^{-2} \text{ m}^2$ et $v_A = 0.14 \text{ m.s}^{-1}$. On trouve $p_B \approx 2500$ Pa, ce qui correspond à la pression de vapeur saturante de l'eau à $T = 20^\circ\text{C}$. On peut voir des bulles se former dans l'écoulement d'eau (phénomène de cavitation). Remarquons que si on relie A et B par un manomètre différentiel, le tube de Venturi est un dispositif permettant de mesurer le débit Q d'un écoulement.

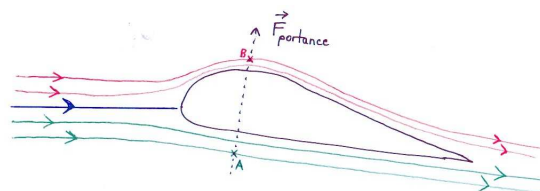


FIG. 5 – Profil d'écoulement autour d'une aile d'avion.

L'effet Venturi regorge d'applications qualitatives. L'une d'elles est la portance d'une aile d'avion, schématisée sur la figure 5. L'aile d'un avion est taillée de sorte que l'air s'écoule plus rapidement au-dessus de l'aile qu'en dessous (les lignes de courant sont plus resserrées au-dessus de l'aile qu'au-dessous). D'après l'effet Venturi, la pression est plus forte au-dessous de l'aile qu'au-dessus. La force associée à ce gradient de pression s'appelle la **portance**.

Référence

More, Christophe & Olivier, Stéphane, "Physique PSI / PSI**", Editions Tec&Doc

⁷Torricelli (1608-1647) était un physicien italien, contemporain de Galilée.

⁸Pitot (1695-1771) était un ingénieur et physicien français.

⁹Cette hypothèse est fondée que si l'écoulement est subsonique, c'est-à-dire $u \lesssim c_s$, où c_s est la vitesse du son dans l'air.

¹⁰Cette vitesse est bien subsonique. Pour une température $T \sim -50^\circ\text{C} \approx 220 \text{ K}$, la vitesse du son vaut $c_s \sim 1070 \text{ km.h}^{-1}$.

¹¹Venturi (1746-1822) était un physicien italien, et ancien prêtre.